

UNA DIMOSTRAZIONE NON MARGINALE

Piergiorgio Odifreddi

Novembre 2006

La mitologia che accompagna l'ultimo teorema di Fermat è troppo conosciuta, per doverla ripetere ancora una volta. Ricordiamo dunque soltanto che, in una nota all'*Aritmetica* di Diofanto, il più famoso matematico dilettante della storia scrisse nel 1637: “Dividere un cubo in due cubi, o in generale una potenza n -esima in due potenze n -esime, è impossibile se n è maggiore di 2: ho trovato una dimostrazione veramente notevole di ciò, ma il margine è troppo stretto per contenerla”.

Il teorema è stato dimostrato nel 1995 da Andrew Wiles, ma la sua dimostrazione usa strumenti sicuramente non disponibili ai tempi di Fermat: dunque, la curiosità di cosa questi avesse in mente rimane invariata, anche se forse oggi possiamo soddisfarla. Enrico Bombieri ha infatti attirato la nostra attenzione su un argomento citato da Eulero verso il 1768, in una nota pubblicata nel primo volume della sua *Opera Postuma Mathematica et Physica* (pp. 231–232), e da lui attribuito al proprio collaboratore Anders Johann Lexell.

L'argomento ha come scopo di mostrare che “il teorema di Fermat si può facilmente riformulare dicendo che certe formule non possono essere dei quadrati”. Esso vale in generale per ogni esponente dispari maggiore o uguale a 3, e nel caso dell'esponente 3 procede come segue: supponiamo che esistano interi (positivi o negativi) relativamente primi fra loro e tali che $a^3 + b^3 = c^3$, con c pari (il che si può sempre supporre, perchè se due dei cubi sono dispari allora il terzo è pari, in quanto loro somma o differenza).

Poniamo $x + y = a^3$ e $x - y = b^3$. Sommando otteniamo $2x = c^3$, e dunque $4x^2 = c^6$ e $8x^3 = c^9$. Moltiplicando otteniamo invece $x^2 - y^2 = a^3b^3$.

Dividendo si ha $(x^2 - y^2)/4x^2 = a^3b^3c^3/8x^3 = z^3/x^3$ per qualche intero z (essendo c pari, c^3 è infatti divisibile per 8). Eliminando i denominatori si arriva infine all'equazione $x^4 - 4xz^3 = x^2y^2$, in cui il lato destro è un quadrato, e i due termini x e z possono essere supposti relativamente primi (altrimenti basta dividerli per il loro massimo comun divisore).

Il lato sinistro si può fattorizzare come $x(x^3 - 4z^3)$, i cui due fattori possono avere solo 1, 2 o 4 come divisori comuni (perchè x e z sono relativamente primi). Supponiamo anzitutto che x sia dispari: allora anche $x^3 - 4z^3$ dev'essere dispari, e i due fattori sono dunque relativamente primi. Essendo il loro prodotto un quadrato, si deve avere $x = s^2$ e $x^3 - 4z^3 = t^2$, con s e t anch'essi dispari e relativamente primi.

Dalle due equazioni si ottiene $s^6 - t^2 = 4z^3$. Il lato sinistro si fattorizza nei due termini $s^3 + t$ e $s^3 - t$, i cui divisori comuni devono anche dividere la loro somma $2s^3$ e la loro differenza $2t$, e possono dunque essere solo 1 o 2. E poichè il loro prodotto deve dare un multiplo di 4, tutti e due i termini devono essere divisibili per 2: ad esempio, $s^3 + t = 2u^3$ e $s^3 - t = 2v^3$ per qualche u e v . Sommando, si ottiene quello che Bombieri chiama “un miracolo”: cioè, $u^3 + v^3 = s^3$, ovvero un'altra soluzione dell'equazione cubica di partenza.

Il caso in cui x è pari è simile e conduce a una conclusione analoga. In entrambi i casi, dunque, partendo da una soluzione se ne trova un'altra, e per completare la dimostrazione per discesa infinita del teorema di Fermat basta dimostrare che la nuova soluzione è più piccola (in valore assoluto) della vecchia. Purtroppo, quando abbiamo supposto che x e z fossero relativamente primi, li abbiamo dovuti dividere per il loro massimo comun divisore: e poichè in origine si aveva $x = c^3/2$ e $z = abc/2$, questo significa che abbiamo ridefinito $x = c^2$ e $z = ab$. Ma poichè $x = s^2$ e $x^3 - 4z^3 = t^2$, allora in realtà $s = c$ e $t = a^3 - b^3$, e dunque $u = a$ e $v = b$. In altre parole, la nuova soluzione è uguale alla vecchia, e invece di una discesa infinita si ha soltanto un circolo vizioso.

Bombieri si domanda se questa potrebbe essere la “dimostrazione veramente notevole” di Fermat. Certamente è nel suo stile, e scriverla nei dettagli (in particolare, ripetendo l'argomento nei casi in cui a essere pari fossero a o b , per evitare l'uso di numeri negativi) l'avrebbe resa troppo lunga per il margine di un libro. Inoltre, la svista finale spiegherebbe perchè Fermat ha potuto illudersi di aver ottenuto un risultato che, in ogni caso, gli ha comunque assicurata una fama imperitura.