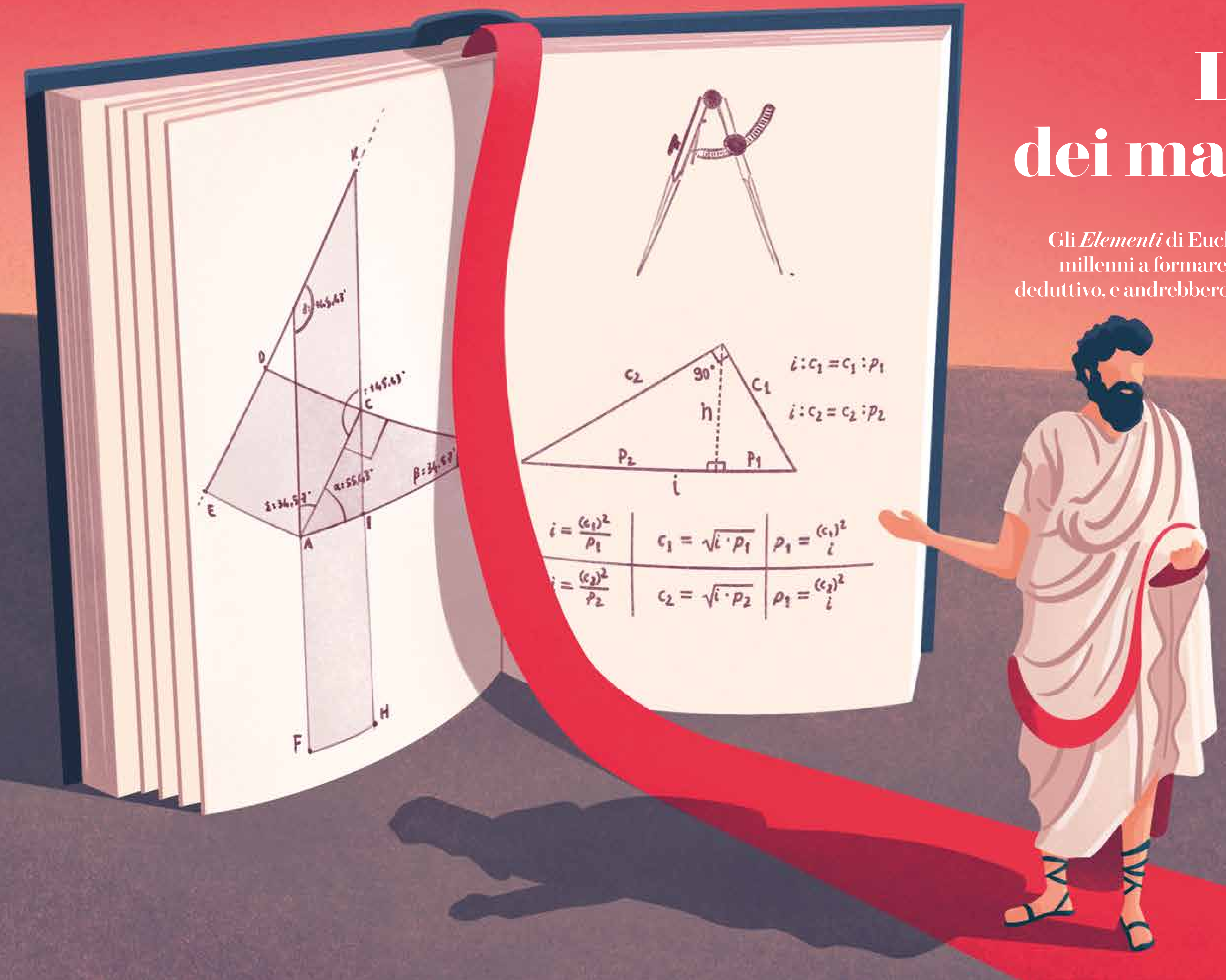
La bibbia dei matematici

Gli *Elementi* di Euclide hanno contribuito per due millenni a formare gli studenti al pensiero logico-deduttivo, e andrebbero letti in ogni scuola anche oggi

di Piergiorgio Odifreddi



Piergiorgio Odifreddi ha studiato matematica in Italia e negli Stati Uniti, ha insegnato logica matematica all'Università di Torino e alla Cornell University di New York. È autore di numerosi libri di divulgazione. Dal 2003 al 2023 ha tenuto su «Le Scienze» una rubrica su matematica e dintorni.

Il teorema di Pitagora è probabilmente il più noto e famoso di tutta la matematica. Molti ricordano il suo enunciato, anche se pochi saprebbero dimostrarlo su due piedi, senza consultare qualche testo o qualche sito. Fu il primo risultato maturo della matematica greca, e sta ancora oggi alla base di molti sviluppi successivi. Per esempio, permette di calcolare la distanza di due punti su un piano cartesiano, a partire dalle loro coordinate, o di definire la metrica delle superfici riemanniane, usate da Einstein nella relatività generale.

A proposito, nella sua *Autobiografia scientifica* Einstein ricorda che, quando aveva 12 anni, uno zio gli spiegò il teorema di Pitagora. Lui non ne aveva mai sentito parlare, ma rimase cosi colpito che si ritirò in una camera a meditarci sopra. Ne uscì dopo un paio d'ore con una dimostrazione basata sul fatto che, se si tira l'altezza relativa all'ipotenusa, si divide il triangolo rettangolo di partenza in due triangoli rettangoli simili a esso. Il teorema di Pitagora segue dal fatto che nei triangoli simili i lati corrispondenti sono proporzionali tra loro.

Può darsi che questa sia una delle dimostrazioni originali del famoso teorema. La figura coinvolta si trova già in una tavoletta cuneiforme rinvenuta a metà del Novecento nel sito sumero di Shaduppum, l'odierna Tell Harmal irachena. Se, come sembra, questa tavoletta risale a circa 4000 anni fa, si tratta di uno dei testi più antichi della storia della matematica.

Quanto alla dimostrazione basata su quella figura, la si trova già nel sesto libro degli *Elementi* di Euclide, che costituiscono un monumento alla matematica greca e uno dei capolavori scientifici di tutti i tempi. Furono anche uno dei libri più letti, studiati e commentati in Occidente fino agli inizi del Novecento: solo la Bibbia ebbe altrettante edizioni, anche se oggi gli *Elementi* sono un po' passati di moda.

Peccato, perché per un paio di millenni contribuirono a formare gli studenti al pensiero logico-deduttivo, addestrandoli alla ferrea concatenazione delle sue proposizioni. Soprattutto delle prime, e in particolare la quarta del primo libro, nota appunto come *pons asinorum*: chi non riusciva a superare quel passaggio accidentato era condannato a rimanere un asino per tutta la vita. Naturalmente leggere Euclide richiedeva, e continua a richiedere, parecchio sforzo: si racconta che il re Tolomeo domandò all'autore di indicargli qualche scorciatoia, ma si sentì rispondere che «non ci sono vie regie in geometria».

Il modello di ragionamento euclideo trascese l'ambito della matematica. Il filosofo Spinoza, per esempio, lo adottò nell'impianto della sua famosa *Etica* (1677): l'opera recava il sottotitolo «*more geometrico demonstrata*» (dimostrata con metodo geometrico), che risultò però più l'espressione di un desiderio che l'annuncio di una realizzazione. Isaac Newton fece lo stesso nei suoi memorabili *Principia* (1687): si racconta che l'unica volta che rise di gusto nella sua vita fu quando qualcuno gli chiese a cosa servisse il libro che stava leggendo, che erano appunto gli *Elementi*.

Per millenni gli studenti si sono chiesti da quale cappello da prestigiatore Euclide avesse estratto i suoi assiomi. I primi quattro erano abbastanza evidenti: due punti individuano un segmento; ogni segmento si può estendere a piacere, in entrambe le direzioni; dati un centro e un raggio, si può costruire il cerchio corrispondente; e tutti gli angoli retti sono uguali fra loro. Per niente evidente era invece il quinto assioma, che oggi enunciamo dicendo che esiste un'unica parallela a una retta data, passante per un punto fuori di essa,

Ma, evidenza a parte, rimanevano molte domande ovvie. Perché scegliere proprio quegli assiomi, e non altri? Come aveva fatto Euclide a capire che su quei fondamenti si potevano erigere tutti i 465 teoremi dei suoi 13 libri, e magari anche quelli futuri ancora da scoprire? E poi, era tutta farina del suo sacco oppure Euclide aveva preso a prestito enunciati e dimostrazioni dai suoi predecessori?

Alla prima domanda si può rispondere con facilità: basta leggere il primo libro dell'opera, come si dovrebbe appunto fare obbligatoriamente in ogni scuola. Bisogna però avere l'accortezza di incominciare dalla fine, invece che dall'inizio: come in quei film che mostrano subito la fine della storia, per farci capire che l'importante è la storia stessa, non solo come va a finire. Detto altrimenti, Euclide inaugurò l'abitudine di scrivere i testi matematici in maniera sintetica, dal semplice al complesso, per presentare risultati che erano stati scoperti in maniera analitica, procedendo al contrario.

Alla fine del primo libro ci sono due proposizioni, la 47 e la 48, che sono rispettivamente il teorema di Pitagora e il suo inverso: il fatto, cioè, che se in un triangolo la somma dei quadrati di due lati è uguale al quadrato del terzo, allora il triangolo è rettangolo, e il terzo lato è l'ipotenusa. La dimostrazione di Euclide del teorema di Pitagora è ingegnosa: mostra che, prolungando l'altezza di un triangolo rettangolo, si divide il quadrato costruito sull'ipotenusa in due rettangoli, che hanno aree uguali ai due quadrati costruiti sugli altri due lati.

Illustrazione di Vito Ansaldi (*pagine precedenti*)

BIBLIOGRAFIA

- **Pitagora, il padre di tutti i teoremi.** Umberto Bottazzini, Il Mulino, 2020.
- **Fondamenti della geometria.** David Hilbert, Franco Angeli, 2012.
- **Divertimento geometrico.** Piergiorgio Odifreddi, Bollati Boringhieri, 2003.
- **Il libro delle meraviglie euclidee.** Paul Wardhaugh, Salani, 2023.
- **Il teorema di Pitagora.** Paolo Zellini, Adelphi, 2023.

Dettaglio della *Scuola di Atene*, l'affresco di Raffaello in cui Euclide esegue una dimostrazione disegnando figure geometriche con un compasso.

DEA/G. Cigolini/Grtty Images

Ma la dimostrazione si basa su altre proposizioni precedenti, che a loro volta si basano su altre proposizioni, e così via, finché ci si riduce a proposizioni evidenti, o quasi. Queste proposizioni sono appunto gli assiomi, scoperti risalendo all'indietro nella ricerca della giustificazione di una particolare dimostrazione del teorema di Pitagora. Ma qualunque altra dimostrazione di quel teorema avrebbe portato ad assiomi analoghi: in particolare, a qualche forma dell'assioma delle parallele, perché il teorema e l'assioma sono dimostrabilmente equivalenti, a partire dagli altri quattro. Euclide non nomina mai Pitagora, né nessun altro matematico: i suoi *Elementi* sono un testo di matematica pura, non di storia della matematica. Sicuramente molti dei teoremi che enuncia erano noti prima di lui, e anche molte delle sue dimostrazioni. Anzi, si pensa che almeno i primi quattro libri siano una riscrittura di opere analoghe, oggi dimenticate perché superate dalla sua. Qualcuno pensa addirittura che Euclide, come d'altronde anche Omero, sia solo il nome fittizio di un personaggio immaginario, e che le loro grandi opere siano in realtà compilazioni e sistematizzazioni di precedenti lavori collettivi.

Ancora più dubbi esistono sulla reale esistenza di Pitagora. Le sue prime biografie pervenuteci sono posteriori di molti secoli alla sua epoca, e nessuna menziona il teorema che oggi porta il suo nome. Certamente il risultato era noto almeno un paio di secoli prima della sua supposta esistenza, e sarebbe meglio e più corretto attribuirlo a Baudhāyana: un matematico indiano dell'ottavo secolo prima della nostra era, che non solo lo enunciò nei *Sulvasutra*, ma introdusse anche un procedimento potenzialmente infinito che permette di calcolare in maniera efficiente lo sviluppo decimale della radice quadrata di 2, anticipando di due millenni e mezzo le serie del moderno calcolo infinitesimale.

Dobbiamo invece dare ai greci ciò che è dei greci: il concetto di dimostrazione formale dei teoremi, a partire da nozioni non definite e assiomi non dimostrati. Gli *Elementi* costituiscono il primo testo pervenutoci in cui si vede chiaramente questo impianto all'opera, anche se non tutto era perfetto nella realizzazione, nonostante le apparenze.

Nell'articolo *L'insegnamento di Euclide*, del 1902, Bertrand Russell ne riassunse i problemi dicendo che «le sue definizioni non sempre definiscono, i suoi assiomi non sempre sono indimostrabili, e le sue dimostrazioni spesso richiedono molti assiomi di cui Euclide era ignaro». Il libro *Fondamenti della geometria* di David Hilbert, del 1899, rimise a nuovo l'impianto euclideo, e rifondò la geometria su una ventina di assiomi, al posto dei cinque originali: lo si può considerare una versione moderna, riveduta e corretta, degli *Elementi*, e dovrebbe essere letto in coppia con essi, per constatare come progredisce la matematica. ■